III Powiatowy Konkurs „Matematyka, Fizyka i Informatyka w Technice”
Etap finałowy – 19 marca 2015

……………………………………
(imię i nazwisko uczestnika)

……………………………………
(nazwa szkoły)

Arkusz zawiera 7 zadań. Zadania 1 i 2 będą oceniane dla każdego uczestnika, natomiast spośród zadań 3-7 uczestnik wskazuje 2 zadania, które mają być oceniane. Decyzję zaznacza uczestnik w poniższej tabeli znakiem X.

Numer zadania	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Czy oceniać?	X	X					
Liczba uzyskanych punktów							

Każde zadanie jest umieszczone na osobnej kartce. Rozwiązania poszczególnych zadań należy umieścić na kartce z treścią zadania.

Czas na rozwiązanie zadań – 90 minut

Zadanie 1. (5 punktów)

Wartości funkcji e^x , sin x i cos x można obliczyć na podstawie następujących szeregów potęgowych

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \quad -\infty < x < \infty$$

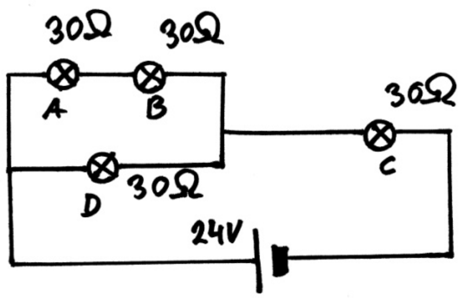
Wykorzystując powyższe wzory wykazać, że

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x \,,$$

W podanych powyżej zależnościach j oznacza liczbę urojoną spełniającą warunek $j^2 = -1$.

Zadanie 2 (5 punktów)

W obwodzie jak na rysunku wszystkie żarówki mają rezystancję równą 30Ω.



Obliczyć

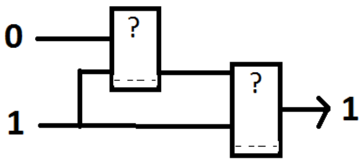
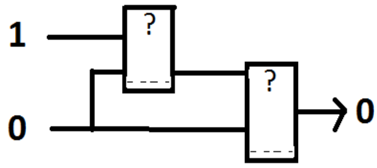
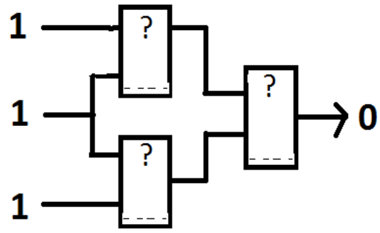
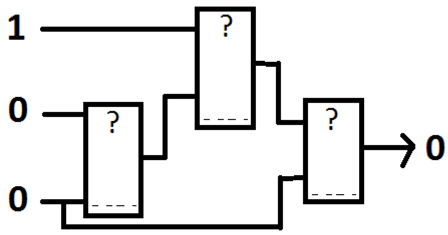
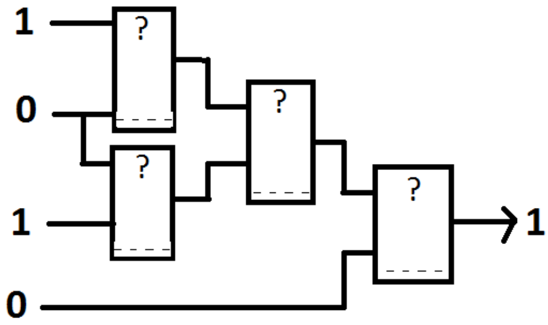
a. moc pobieraną przez każdą z żarówek,
b. moc pobieraną przez każdą z żarówek, gdy żarówka A jest przepalona, tzn. jej rezystancja jest nieskończenie wielka.

Zadanie 3 (5 punktów)

Na drodze o długości A metrów przednie koło bryczki obróciło się X razy, natomiast tylne koło wykonało B obrotów mniej. Niech Y oznacza różnicę obwodów tylnego i przedniego koła, wyrażoną w centymetrach. Znaleźć zależność Y od X.

Zadanie 4 (5 punktów)

W każdym z poniższych układów prostokąty reprezentują ten sam rodzaj bramki. Na podstawie informacji dotyczących wartości na wejściach i wyjściu określ, czy użyto bramki AND, OR, NAND, NOR lub XOR.

<table>
<tr><td>a)
</td><td>b)
</td><td>c)
</td></tr>
<tr><td>d)
</td><td colspan="2">e)
</td></tr>
</table>

Zadanie 5 (10 punktów)

Dane jest *n* przedmiotów o różnych wagach. Należy wybrać najlżejszy i najcięższy przedmiot spośród *n* przedmiotów posługując się wagą z dwiema szalkami, ale bez odważników. Waga, którą dysponujemy, daje za pomocą jednego ważenia możliwość ustalenia, który z dwóch przedmiotów jest lżejszy.
Pytania:

1. Jaka jest najmniejsza liczba ważeń, którą trzeba wykonać, aby znaleźć najlżejszy przedmiot. Odpowiedź uzasadnij.
2. Podaj algorytm dla zadania jednoczesnego znajdowania najlżejszego i najcięższego przedmiotu za pomocą tej wagi. Zapisz algorytm w postaci listy kroków, schematu blokowego lub wykorzystując język programowania.
3. Podaj jaka jest liczba ważeń, którą trzeba wykonać w podanym przez Ciebie algorytmie jednoczesnego znalezienia najlżejszego i najcięższego przedmiotu. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 6 (10 punktów)

Porównaj roczne koszty ogrzewania budynku, dla którego dzienne szczytowe zapotrzebowanie na moc grzewczą wynosi 30 kW w przypadku:
a) zastosowania ogrzewania gazowego,
b) zastosowania pompy ciepła o współczynniku efektywności (Ilość potrzebnej energii elektrycznej do wyprodukowania danej ilości energii cieplnej) 0,25 i sprawności 0,9.

Do rozwiązania przyjąć należy następujące parametry. Długość sezonu grzewczego 6 miesięcy, średnie zapotrzebowanie mocy w sezonie 60% zapotrzebowania szczytowego, cenę energii elektrycznej 0,6 zł/kWh, gazu: 1,4 zł/m^3, wartość opałową gazu $H = 3{,}9 \cdot 10^7 J/m^3$, sprawność kotła gazowego 70%. [kWh · 3600 = MJ]

Zadanie 7 (10 punktów)

Dany jest nieskończony ciąg M liczb naturalnych zapisany w następujący sposób:

123456789101112131415161718192021222324252627282930313233343536373839.........

Określ, jaka cyfra znajduje się na pozycji nr 2015 tego ciągu oraz jaką liczbę tworzy ta cyfra.